Abstract in lingua italiana

Il problema del trasporto fu proposto per la prima volta dal matematico francese Gaspard Monge nel 1781. Si tratta del problema di minimizzare il costo associato al trasporto di una certa quantità di massa da una configurazione iniziale a una configurazione finale che si assumono date e costituiscono i vincoli del problema. Ciò che rende estrememente affascinante questo argomento, che si colloca in modo naturale nel campo del calcolo delle variazioni, è che ha connessioni molto profonde con diversi ambiti della matematica che possono sembrare molto lontani dalla natura del problema stesso, come le equazioni alle derivate parziali, la geometria differenziale e l'analisi funzionale. In particolare, gli strumenti che vengono introdotti tramite la teoria del trasporto ottimo costituiscono le basi per sviluppare la cosiddetta "analisi geometrica", che mira a implementare il calcolo differenziale in ambienti non lisci, come gli spazi metrici. Questa tesi di laurea magistrale ha lo scopo di presentare la teoria classica del trasporto ottimo al fine di evidenziare come quest'ultima può essere estesa e applicata al contesto non metrico delle varietà di lorentziane.
Nel primo capitolo vengono studiate alcune proprietà delle misure boreliane di probabilità su uno spazio polacco, al fine di fornire una nozione adeguata di topologia con la quale equipaggiare questo tipo di spazi di misure.
Nel secondo capitolo viene analizzata la formulazione di Monge del problema di trasporto ottimo in termini di mappe di trasporto, sottolineandone le criticità e spiegando le ragioni per cui Kantorovich ne studiò una definizione alternativa, più generale ed efficiente in termini di piani di trasporto. In particolare, viene mostrato come le proprietà di compattezza della topologia debole* sull'insieme dei piani di trasporto ammissibili tra due fissate configurazioni di massa assicurino l'esistenza dei minimi sotto ipotesi di regolarità molto blande sulla funzione di costo (in particolare, semicontinuità e uniforme limitatezza inferiore). Al fine di chiarire quale sia la natura della condizione di ottimalità, viene presentato il teorema fondamentale del trasporto ottimo, che collega la proprietà di ottimalità di un piano di trasporto alle caratteristiche geometriche del suo supporto in relazione alla funzione di costo scelta c, in particolare al suo essere c-ciclicamente monotono. Successivamente, si dimostra che la dipendenza dell'ottimalità di un piano di trasporto solo dalla geometria del suo supporto e non da come la massa è distribuita all'interno del supporto stesso ha importanti conseguenze per quanto riguarda la stabilità della condizione di ottimalità. Poiché la formulazione di Kantorovich permette di inserire la teoria del trasporto ottimo nel contesto della programmazione lineare, il duale del problema del trasporto ottimo viene introdotto ed analizzato; l'approccio duale consente di trasformare il problema di minimizzare un costo in quello di massimizzare un profitto, tenendo traccia dell'informazione riguardante il costo ma trasformandola in un vincolo. Grazie a quanto è stato introdotto fino a questo punto, viene studiato il problema dell'esistenza di mappe ottimali, il quale è strettamente legato a quanto gli insiemi c-ciclicamente monotoni si discostano dall'essere grafici di funzioni. In particolare, sono presentati i casi dello spazio euclideo $\mathbb{R}^d$ con la funzione di costo $c(x, y) = |x - y|^2/2$ e di una varietà riemanniana liscia, connessa e compatta M con la

funzione di costo $c(x,y) = d^2(x,y)/2$ (dove $d : M \times M \to [0,+\infty)$ denota la distanza riemanniana su M).
Nel terzo capitolo, viene definita la distanza di Wasserstein W_2 sullo spazio $\mathscr{P}_2(X)$ delle misure boreliane di probabilità con momento secondo finito su uno spazio polacco (X,d). Successivamente, alcune delle proprietà della metrica di Wasserstein vengono analizzate al fine di studiare il problema del trasporto ottimo con la funzione di costo $c(x,y) = d^2(x,y)$. Inoltre, alcune delle proprietà topologiche dello spazio $(\mathscr{P}_2(X), W_2)$ sono dimostrate e viene provato come la completezza, la separabilità e la compattezza di (X,d) sono automaticamente ereditate da $(\mathscr{P}_2(X), W_2)$. Infine, viene studiato lo spazio di Wasserstein sugli spazi geodetici, evidenziando come lo spazio di Wasserstein su uno spazio geodetico sia esso stesso geodetico.
Nel quarto capitolo, vengono introdotti alcuni argomenti sulla struttura lorentziana dello spazio-tempo e alcune nozioni di base sulla teoria della causalità, al fine di comprendere le principali caratteristiche dell'ambiente che sarà trattato nelle sezioni successive. In seguito, alcuni concetti provenienti dalla teoria classica del trasporto ottimo che sono stati trattati nei precedenti capitoli vengono adattati affinchè possano essere utilizzati nel contesto lorentziano. Infatti, il problema principale che si riscontra nel lavorare con metriche lorentziane consiste nel fatto che esse non inducono una distanza. Quindi, dato che la teoria del trasporto ottimo è formulata per trattare le strutture metriche, alcune difficoltà essenzialmente tecniche devono essere superate. Infine, i vincoli dal basso e dall'alto sulla curvatura di Ricci di uno spazio-tempo vengono caratterizzati in termini di convessità e concavità del funzionale entropia di Shannon-Boltzmann lungo un'adeguata classe di curve di misure boreliane di probabilità, al fine di ottenere una formulazione equivalente delle equazioni di campi di Einstein che sia indipendente dalle proprietà di differenziabilità della varietà e possa quindi essere estesa ad un contesto non liscio.