Sintesi della Tesi Magistrale *“Trasformata di Gabor ed applicazioni allo studio della regolarità di operatori pseudo-differenziali”* dello studente Antonino De Martino (relatore Dott.ssa Chiara Boiti)

La tesi magistrale *Trasformata di Gabor ed applicazioni allo studio della regolarità di operatori pseudo-differenziali* dello studente Antonino De Martino tratta diversi argomenti dell’analisi tempo-frequenza, come gli spazi di modulazione, gli operatori pseudo-differenziali, gli operatori di localizzazione ed il fronte d’onda di Gabor.

Sono tutti argomenti importanti per le applicazioni nell’ambito della trasmissione dei segnali. Negli ultimi anni, infatti, si sono sviluppati e approfonditi sempre più legami tra la teoria delle equazioni alle derivate parziali (e più in generale degli operatori pseudo-differenziali) e gli strumenti dell’analisi tempo-frequenza, che permettono di trattare i segnali contemporaneamente sia nel tempo che nelle frequenze.

Nel primo capitolo si sono richiamate alcune proprietà di base dei Gabor frames, della trasformata di Wigner e della trasformata di Gabor (o short-time Fourier transform), definita da

$$V_\varphi f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{\varphi(t-x)}e^{-it\cdot\omega}\,dt.$$

Gli spazi più adatti per lavorare con la trasformata di Gabor sono gli spazi di modulazione $M^{p,q}_m$, originariamente introdotti da H.G Feichtinger negli anni ’80, definiti da

$$M^{p,q}_m = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \quad V_\varphi f \in L^{p,q}_m(\mathbb{R}^d)\}, \qquad 1 \le p, q \le +\infty,$$

dove $\mathcal{S}'$ è lo stazio delle distribuzioni temperate ed $L^{p,q}_m$ è lo spazio pesato a norma mista $L^{p,q}$ con peso m. Gli spazi di modulazione sono spazi di Banach con norma $\|f\|_{M^{p,q}_m} = \|V_\varphi f\|_{L^{p,q}_m}$ e sono indipendenti dalla scelta della finestra $\varphi \in \mathcal{S}$. Lo spazio duale è dato da $M^{p',q'}_{1/m}$, dove p', q' sono rispettivamente gli esponenti coniugati di p e q. Nella tesi si sono studiate diverse propietà di tali spazi, come la densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ in $M^{p,q}_m$, la formula di inversione per la short-time Fourier transform in $M^{p,q}_m$, il comportamento della convoluzione negli spazi di modulazione.

Nel secondo capitolo si è fornita una breve introduzione agli operatori pseudo-differenziali. La classe di simboli $S^m_{\rho,\delta}$, con $m \in \mathbb{R}$ e $0 \le \sigma < \rho \le 1$, è definita come l’insieme delle funzioni $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ tali che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ (dove $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$) esiste una costante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \qquad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Ai fini delle applicazioni agli operatori pseudo-differenziali in classi globali come $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si è poi introdotta la definizione di simbolo $a(z) \in G^m(\mathbb{R}^{2d})$, per $m \in \mathbb{R}$, nel senso di

Shubin: $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, tale che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2d}$ esiste $C_\alpha > 0$ per cui

$$|\partial_z^\alpha a(z)| \le C_\alpha \langle z\rangle^{m-|\alpha|}, \qquad z \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Come esempi di operatori pseudo-differenziali in tale ambito si sono considerate le quantizzazioni di Kohn-Nirenberg e di Weyl e, più approfonditamente, l'operatore di localizzazione

$$L^a_{\varphi,\psi} f(t) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x,\xi) V_\varphi f(x,\xi) \Pi(x,\xi)\psi(t)\, dx\, d\xi, \quad t \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

dove $a(x,\xi) \in G^m(\mathbb{R}^{2d})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ e $\Pi(x,\xi)$ è l' operatore di spostamento tempo-frequenza

$$\Pi(x,\xi)\psi(t) = e^{i\xi\cdot t}\psi(t-x).$$

In particolare, ci si è focalizzati sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché l'operatore di localizzazione $L^a_{\varphi,\psi}$ risulti limitato in $M^{p,q}_m$, quando il simbolo e le finestre sono in appositi spazi di modulazione.

Nello stesso capitolo si sono anche inseriti alcuni risultati originali. Più precisamente, si è lavorato con i seguenti spazi di modulazione con peso esponenziale $m_\lambda = e^{\lambda\omega(z)}$, per una funzione peso ω:

$$\mathbf{M}^{p,q}_{m_\lambda}(\mathbb{R}^d) := \{f \in S'_\omega : V_\varphi f \in L^{p,q}_{m_\lambda}(\mathbb{R}^d)\}$$

dove S'_ω è lo spazio delle distribuzioni ω-temperate duale dello spazio S_ω delle funzioni rapidamente decrescenti con peso ω. L'obiettivo è stato quello di studiare la compattezza dell'operatore di localizzazione in S_ω. A tal fine abbiamo prima esteso i risultati di [CG] sugli spazi di modulazione classici ad $\mathbf{M}^{p,q}_{m_\lambda}(\mathbb{R}^d)$ e poi abbiamo dimostrato il seguente risultato

> Siano $\varphi, \psi, g_0 \in S_\omega(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. Se $F \in \mathbf{M}^\infty_{m_\mu}(\mathbb{R}^d)$ per ogni $\mu > 0$ e
>
> $$\lim_{|x|\to+\infty} \sup_{|\xi|\le R} |V_{g_0} F(x,\xi)| e^{\mu\omega(x,\xi)} = 0, \qquad \forall R > 0,$$
>
> allora $L^F_{\varphi,\psi} : S_\omega(\mathbb{R}^d) \to S_\omega(\mathbb{R}^d)$ è compatto.

Per raggiungere questo scopo è stato necessario estendere i risultati di [CG] .

La compattezza dell'operatore di localizzazione è importante per le applicazioni nella ricostruzione dei segnali. Infatti, rispetto alla formula di inversione per la trasformata di Gabor

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} V_\varphi f(x,\xi)\Pi(x,\xi)\varphi(t)\, dx\, d\xi,$$

che permette di ricostruire il segnale $f(t)$, nell'operatore di localizzazione definito in (1), prima di ricostruire il segnale $f(t)$ si modifica la trasformata di Gabor $V_\varphi f(x, \xi)$ moltiplicandola per un opportuno simbolo $a(x, \xi)$. In questo modo ciò che si recupera è una versione filtrata del segnale originale f.

Nell'ultimo capitolo si è studiato il fronte d'onda di Gabor. Il fronte d'onda è un concetto di base nella teoria locale degli operatori lineari alle derivate parziali ed estende il supporto singolare di una distribuzione. Tratta dell'analisi delle singolarità di una funzione (o distribuzione) e allo stesso tempo descrive le direzioni lungo le quali le alte frequenze (in termini di trasformata di Fourier) responsabili delle singolarità si propagano. Poiché la trasformata di Gabor tratta simultaneamente le variabili e le covariabili di una funzione (o distribuzione), è abbastanza naturale provare ad applicare i metodi dell'analisi tempo-frequenza alla teoria del fronte d'onda. Si è quindi considerato un fronte d'onda globale, definito in termini di decadimento rapido della trasformata di Gabor $V_\varphi u$ di $u \in \mathcal{S}'$, come introdotto da Rodino e Wahlberg in [RW] . Si è anche visto che è sufficiente considerarne una versione discreta nell'ambito dei Gabor frames, analizzando il decadimento dei coefficienti di Gabor di u.

In ambito medico, ad esempio, i Gabor frames sono stati utilizzati in [OGFC], applicandoli presso l'ospedale "La Fe" di Valencia per classificare in modo più preciso gli episodi di fibrillazione parossistica e persistente. Lo studio è stato fatto analizzando l'elettrocardiogramma di 186 pazienti; il primo step è stato quello di rimuovere i segnali più deboli e più forti, si è poi rimossa l'attività ventricolare eseguendo la Fast Fourier Transform, che è un algoritmo ottimizzato che permette di calcolare la trasformata di Fourier.

Altri strumenti dell'analisi tempo-frequenza sono stati utilizzati, ad esempio, in [DW], per analizzare alcuni brani musicali mettendone in risalto gli strumenti. Inoltre l'utilizzo dell'analisi tempo-frequenza trova parecchie applicazioni nei sonar e nei radar, (vedere, ad esempio, [B]). Questi strumenti emettono un segnale non stazionario. Solo una rappresentazione tempo-frequenza è in grado di preservare l'alta risoluzione adatta a mantenere la complessa dinamica del segnale. Un problema legato ai sonar utilizzati nelle navi, risolto dall'analisi tempo-frequenza, è quello di determinare il ritardo nel ricevere il segnale che presenta un eco. Altro campo in cui si applica l'analisi tempo-frequenza è nell'utilizzo di strumenti elettronici, i cui segnali hanno problemi di distorsione. Altro utilizzo è quello legato all'individuazione di una sorgente sonora all'interno di una macchina guasta (vedere [RSBA]). I classici strumenti dell'analisi tempo frequenza possono indicare molto chiaramente la frequenza e la posizione del suono all'interno della macchina.

N.B. Parte dei risultati originali della tesi sono stati recentemente inseriti nella pubblicazione [BD].

Riferimenti bibliografici

[B] B. Boashash, *Time-Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive Reference*, ELSEVIER Ltd, Oxford, 2003.

[BD] C. Boiti, A. De Martino, *Compactness of localization operators in spaces of rapidly decreasing ultradifferentiable functions*, preprint (2019), arXiv:1910.09243v1, sottomesso per la pubblicazione.

[CG] E. Cordero, K. Gröchenig, *Time-frequency analysis of localization operators*, J. Funct. Anal. **205** (2003), no. 1, 107-131.

[DW] G.W. Don, J.S. Walker, *Music: A time-frequency approach*, Journal of Mathematics and Music, 2006, 1-22.

[OGFC] N. Ortigosa, A. Galbis, C. Fernández, Ó. Cano, *Gabor frames for classification of paroxysmal and persistent atrial fibrillation episodes*, Medical Engineering and Physics **39** (2017), 31-37.

[RW] L. Rodino, P. Wahlberg, *The Gabor wave front set*, Monatsh. Math. **173** (2014), 625-655.

[RSBA] M. Rusli, L. Son, M. Bur, A. Arisman, *Application of Short-Time Fourier Transform and Wavelet Transformfor Sound Source Localization Using Single Moving Microphone in Machine Condition Monitoring*, ICoSE Conference Proceedings, DOI: 10.18502/keg.v1i1.488, 2016.