**Autore**: Federico Bertacco
**Relatori**: Dr. Carlo Orrieri, Dr. Luca Scarpa

**Data:** 30/09/2020

## On the Stochastic Allen-Cahn Equation with Logarithmic Potential

### Sintesi in Italiano

La tesi "On the Stochastic Allen-Cahn Equation with Logarithmic Potential" ha come scopo quello di studiare da un punto di vista matematico l'equazione di Allen-Cahn stocastica con potenziale logaritmico. Il principale contributo contenuto nella tesi è quello di provare, in un setting stocastico, l'esistenza e l'unicità di una soluzione in senso variazionale per l'equazione di Allen-Cahn munita con il potenziale più rilevante da un punto di vista termodinamico, cioè quello logaritmico.

L'equazione di Allen-Cahn appartiene ai cosiddetti "modelli ad interfaccia diffusa" ed è utilizzata per descrivere le transizioni di fasi in sistemi in cui le fasi sono separate da una sottile regione di interfaccia. Tale equazione fu introdotta inizialmente nella teoria di Van der Waals sulla separazione delle fasi e fu in seguito utilizzata in [1] per descrivere la formazioni di grani in materiali cristallini vicini alla loro temperatura di fusione. Il problema può essere formulato come segue: si consideri un dominio liscio e limitato $D$ di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ il quale contiene un materiale che può consistere di due differenti stati. Ad ogni istante di tempo $t$ e in ogni punto $x$ in $D$ si assume che esista un parametro d'ordine $u$ che rappresenta la densità normalizzata di una delle due fasi del sistema. In questo modo si avrà che gli insiemi $\{u = 1\}$ e $\{u = -1\}$ corrispondono alle regioni pure del sistema, mentre l'insieme $\{-1 < u < 1\}$ corrisponde alle regioni di interfaccia in cui le due fasi coesistono assieme e sono miscelate. Nel caso isotermico, si suppone che l'energia libera del sistema si possa rappresentare come un funzionale di $u$ della forma:

$$\mathcal{E}(u) := \int_D \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) \tag{0.1}$$

dove $F$ è un cosiddetto potenziale a doppio pozzo. Nella letteratura sui modelli di transizione di fase sono state proposte diverse scelte per il potenziale $F$, per esempio alcune tra le scelte più note sono:

$$F_{\mathrm{pol}}(r) := \frac{1}{4}(1-r^2)^2, \qquad r \in \mathbb{R} \tag{0.2}$$

$$F_{\log}(r) := (1+r)\ln(1+r) + (1-r)\ln(1-r) - cr^2, \quad r \in (-1,1), \quad c > 1 \tag{0.3}$$

che vengono usualmente chiamati potenziale polinomiale e potenziale logaritmico, rispettivamente. Il potenziale polinomiale $F_{\mathrm{pol}}$ è certamente facile da trattare da un punto di vista matematico, tuttavia è solo un'approssimazione del potenziale logaritmico. Quest'ultimo è più consistente da un punto di vista termodinamico ed è definito solamente nell'intervallo fisicamente rilevante.

Fissato un tempo finale $T > 0$, l'equazione di Allen-Cahn può essere ottenuta come il flusso gradiente in $L^2$ dell'energia libera $\mathcal{E}$ ed è data dall'equazione alle derivate parziali semilineare parabolica della seguente forma:

$$\partial_t u - \Delta u + F'(u) = 0 \quad \text{in} \quad (0,T) \times D$$

Al fine di tenere conto dei movimenti aleatori a livello microscopico causati dalle fluttuazioni termodinamiche del sistema, si può introdurre nell'equazione di Allen-Cahn un rumore, che si suppone essere modellizzato da un processo di Wiener cilindrico infinito-dimensionale $W$ a valori su uno spazio di Hilbert separabile $U$. Completando poi l'equazione con delle condizioni al bordo di Neumann omogenee e con una condizione iniziale, si ottiene in questo modo il problema oggetto di studio:

$$\begin{aligned}
&du(t) - \Delta u(t)dt + F'(u(t))dt = g(t)dt + B(u(t))dW(t) && \text{in} \quad (0,T) \times D \\
&\partial_{\mathbf{n}} u = 0 && \text{in} \quad (0,T) \times \partial D \\
&u(0) = u_0 && \text{in} \quad D
\end{aligned}$$

dove $g$ è una forza esterna aleatoria che agisce sulle dinamiche del sistema e $B$ è un opportuno operatore a valori sullo spazio degli operatori di Hilbert-Schmidt da U in $L^2(D)$.

Il contenuto della tesi può essere suddiviso in due parti principali. La prima parte, che consiste dei Capitoli 1, 2 e 3, ha come obiettivo quello di presentare alcuni risultati che sono necessari per lo studio del problema sopra menzionato. Più precisamente, nel Capitolo 1 vengono richiamati alcuni risultati di base dell'analisi funzionale, dell'analisi convessa e dell'analisi monotona che saranno poi utilizzati nei capitoli seguenti.
Il Capitolo 2 è dedicato alla teoria dell'integrazione stocastica in spazi infinito-dimensionali. Si inizia presentando il concetto di processo di Wiener in spazi di Hilbert e di martingala in spazi di Banach. Si procede poi alla costruzione dell'integrale stocastico, andando in seguito ad elencarne le principali proprietà e stabilendo infine la formula di Itô.
Il Capitolo 3 tratta dell'approccio variazionale alle equazioni alle derivate parziali stocastiche. Questo metodo è una naturale e potente estensione al caso stocastico della teoria variazionale classica per le equazioni di evoluzione deterministiche. Tale metodo fu introdotto da Pardoux in [4] e generalizzato in seguito da Krylov e Rozovskii in [3]. Uno dei maggiori vantaggi dell'approccio variazionale è quello di poter trattare equazioni totalmente nonlineari, in cui l'operatore di drift è definito da uno spazio di Banach a valori nel suo duale e può dipendere in modo esplicito dal tempo ed essere aleatorio. Dall'altro lato, il termine di drift deve soddisfare delle opportune condizioni di continuità, monotonia, coercitività e limitatezza che impongono al termine nonlineare nell'equazione di non eccedere una determinata crescita polinomiale. Il capitolo è strutturato come segue: si comincia elencando le ipotesi che i coefficienti di drift e diffusione dovranno soddisfare. In seguito, viene enunciato il teorema di esistenza e unicità assieme alla formula di Itô per la norma al quadrato. Si passerà poi alla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità e a fornire una formula di Itô più generale nel setting variazionale, con un focus su un particolare esempio che si rivelerà molto importante nelle applicazioni. Infine, vengono tratti alcuni semplici esempi e viene inoltre discussa la buona posizione dell'equazione di Allen-Cahn stocastica con potenziale polinomiale.

La seconda parte della tesi, che consiste del Capitolo 4, riguarda lo studio dell'equazione di Allen-Cahn stocastica con potenziale logaritmico ed è parte dell'articolo [2] recentemente pubblicato sul giornale scientifico "Nonlinear Analysis". Le difficoltà principali che emergono nello studio di questo problema sono essenzialmente di due tipi. La prima difficoltà è causata dal fatto che la derivata del potenziale logaritmico "esplode" in $\pm 1$ impedendo dunque di applicare l'approccio variazionale classico per lo studio di questa equazione. Infatti, la teoria variazionale richiederebbe che la derivata del potenziale abbia una crescita polinomiale, andando dunque ad escludere il caso del potenziale logaritmico $F_{\log}$. La seconda difficoltà è causata dalla presenza del termine di rumore all'interno dell'equazione, che può portare il parametro d'ordine $u$ al di fuori dell'intervallo fisicamente rilevante $[-1, 1]$ e dunque, in particolare, al di fuori del dominio di definizione del potenziale logaritmico $F_{\log}$.
Per ovviare a questi problemi si è considerato un opportuno rumore di tipo moltiplicativo e si è lisciata l'equazione tramite un'approssimazione della parte singolare. Più precisamente, l'operatore di diffusione $B$, che si assume dipendere in modo esplicito dal processo incognito $u$, si richiede soddisfare un'opportuna condizione di lipschitzianità e di annullarsi ai punti estremi dell'intervallo fisicamente rilevante, cioè in $\pm 1$. A livello intuitivo, questo significa che il rumore viene "spento" ogni qual volta il parametro d'ordine $u$ raggiunge i punti estremi $\pm 1$, in modo che quest'ultimo rimanga confinato all'interno dell'intervallo fisicamente rilevante. Per studiare l'equazione che si ottiene considerando questo tipo di diffusione, si è considerata un'equazione approssimata in cui la parte monotona crescente della derivata del potenziale logaritmico $F'_{\log}$ è sostituita dalla sua approssimata di Yosida.
Il capitolo è strutturato come segue: si comincia fissando le ipotesi sul potenziale, sul rumore e sui dati, si passa poi a precisare i concetti di soluzione variazionale e di soluzione analiticamente forte, andando in seguito ad enunciare i risultati principali. Dopo di che si introduce il problema approssimato, si prova la sua buona posizione e si ottengono diverse stime uniformi in media sulla soluzione approssimata. Infine, i risultati principali vengono provati: passando al limite in opportune topologie si ottiene una soluzione variazionale al problema originale; si dimostra la dipendenza con continuità dai dati della soluzione; viene determinata un'ulteriore stima in modo da provare l'esistenza di una soluzione analitica; vengono provate stime in media sulle derivate del potenziale logaritmico, in vista di una futura applicazione ad un problema di controllo legato all'equazione di Allen-Cahn stocastica.

## Riferimenti bibliografici


[1] S. M. Allen and J. W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metallurgica*, 27(6):1085–1095, June 1979.

[2] F. Bertacco. Stochastic Allen–Cahn equation with logarithmic potential. *Nonlinear Analysis*, 202:112122, January 2021.

[3] N. V. Krylov and B. L. Rozovskii. Stochastic evolution equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 16(4):1233–1277, 1981.

[4] E. Pardoux. Équations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones : étude de solutions fortes de type itô. 1975.