Sintesi della Tesi di Laurea Magistrale: *A Study of Fractional Calculus Applicability to System Identification and Modeling for Control Design Purposes* dello studente Jonathan Franceschi

Relatori:

- Primo Relatore: Prof.ssa Chiara Boiti, Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Ferrara
- Secondo Relatore: Prof. J. Alberto Conejero Casares, Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València, Spagna
- Correlatore: Prof. Enric Picó i Marco, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universitat Politècnica de València, Spagna

La tesi di laurea magistrale tratta del calcolo frazionario da due diversi punti di vista – uno teorico e uno applicato – e conclude un percorso di doppio titolo condotto tra le università di Ferrara e València.

Il calcolo frazionario nasce circa trecento anni fa come generalizzazione a ordini arbitrari di operatori differenziali e integrali classici, e negli ultimi anni ha visto un notevole interesse nel campo della matematica applicata, dell'ingegneria industriale e della modellistica, soprattutto per la maggiore flessibilità e per la natura non locale degli operatori che descrive.

La tesi studia l'efficienza dell'*identificazione frazionaria* sperimentale di sistemi dinamici di tipo single-input-single-output (SISO), in particolare quelli *linear time invariant* (LTI). La motivazione è quella di studiare problemi di controllo applicati alla gestione della temperatura di conduttori, in particolare le celle Peltier utilizzate per far avvenire le reazioni biochimiche dell'apparato in gara per l'*International Genetically Engineered Machine*, una competizione di biologia sintetica a livello mondiale rivolta agli studenti universitari, che il team dell'UPV ha vinto nel 2018.

Nel primo capitolo vengono richiamati concetti di ingegneria riguardanti il *feedback* e il controllo seguendo [5], come il concetto di *funzione di trasferimento* per i sistemi LTI – sia ordinari che frazionari – e di *diagrammi di Bode* – grafici del *guadagno* e della *fase* di un sistema basato su segnali elettronici. In particolare, viene osservato come i diagrammi di Bode frazionari dipendano solo dalla frequenza del segnale – come accade per sistemi lineari – mentre la non linearità dovrebbe dare luogo a diagrammi di Bode dipendenti anche dall'*ampiezza* [7]. Ciò implicherebbe che i modelli frazionari non siano in grado di catturare nonlinearità significative dei sistemi che dovrebbero descrivere. Questo, unito al fatto che spesso per ridurre il costo computazionale i sistemi frazionari vengono approssimati con *filtri* ordinari di ordine molto alto, rende poco chiari i benefici che apporterebbero rispetto agli approcci classici di ingegneria del controllo. Da qui l'esigenza di un'indagine sulla loro performance.

Dunque, nel secondo capitolo della tesi vengono presentati gli operatori differenziali e integrali frazionari standard secondo le definizioni di Riemann-Liouville, di Grünwald-Letnikov e Caputo seguendo [3], soffermandosi in particolare sulle loro proprietà rispetto alle trasformate di Fourier e Laplace seguendo [8]. Il capitolo si conclude con un contributo originale sulle trasformate integrali che possano generalizzare la trasformata di Fourier nel contesto del calcolo frazionario, in analogia al metodo di risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali tramite trasformata di Fourier. In tal senso, le diverse versioni di trasformata di Fourier frazionaria presenti in letteratura non si sono sempre dimostrate come le più idonee. Da qui l'idea di trovare una trasformazione integrale $\mathcal{F}_f$ dipendente da una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che per ogni funzione u, v nello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ soddisfi le seguenti proprietà:

(i) $[\mathcal{F}_f\,(u * v)](\xi) = [\mathcal{F}_f\; u(x)](\xi) \cdot [\mathcal{F}_f\; v(x)](\xi)$;

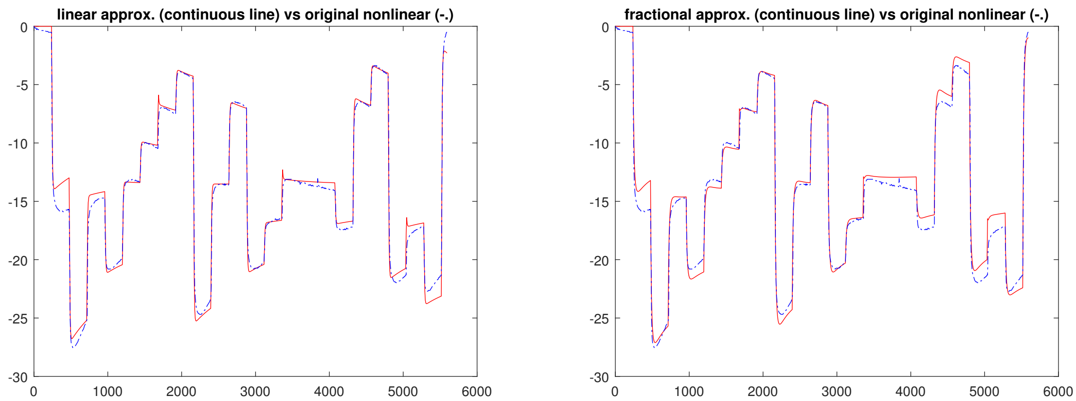

Figura 1: Confronto tra approssimazione frazionaria e ordinaria sulla cella Peltier. A sinistra, l'identificazione ordinaria; a destra quella frazionaria. L'approssimazione è mostrata in rosso, i dati sperimentali in blu. Come si vede, i profili degli output sono molto simili.

(ii) $[\mathcal{F}_f\,(\mathcal{D}^a_+ u(x))] = f^a(\xi)\cdot[\mathcal{F}_f\,u(x)](\xi)$ per ogni $a\in\mathbb{R}^+$;

(iii) $\mathcal{F}_f$ è invertibile (perlomeno) a sinistra, cioè esiste $\mathcal{G}_f$ tale che: $(\mathcal{G}_f\circ\mathcal{F}_f)(u(x)) = u(x)$.

Il risultato dimostrato è che se f soddisfa opportune ipotesi, l'operatore

$$[\mathcal{F}_f\,u(x)](\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-ix\cdot f(\xi)}\,dx$$

soddisfa le proprietà (i)–(iii) generalizzando la *trasformata di Fourier frazionaria* proposta in [4]. In particolare, la funzione fase f è libera di essere scelta di volta in volta nel modo più indicato per la risoluzione del problema che si intende affrontare.

Nel terzo e nel quarto capitolo vengono presentati richiami di identificazione di sistemi e dei principali strumenti adottati dalla comunità – come per esempio il FOMCON [9] – e le sfide da affrontare in caso si utilizzino operatori frazionari. In particolare, viene descritto il metodo più popolare di gestione di operatori di ordine reale, i.e., il filtro di Oustaloup [6], che, inserito in una funzione di trasferimento, approssima un termine del tipo s^α, con $\alpha\in\mathbb{R}$ come il prodotto di N funzioni razionali, dove l'intero N è l'ordine di approssimazione. Il vantaggio pratico del filtro è che il costo computazionale richiesto cresce linearmente con l'ordine di approssimazione, ma ha lo svantaggio che il suo utilizzo riduce effettivamente una funzione di trasferimento in cui compaiono esponenti reali in una funzione di trasferimento ordinaria, eventualmente di ordine complessivo molto alto, equivalente a quanto si otterrebbe impiegando una equazione differenziale ordinaria per descrivere il sistema.

Nel quinto capitolo vengono presentati e discussi i risultati numerici originali dei test numerici sulle prestazioni dell'identificazione di sistemi, ottenuti confrontando gli output dei modelli frazionari con quelli dati dai modelli ordinari per sistemi per cui si era in possesso degli output sperimentali (un forno industriale e, come detto sopra, una cella Peltier). Un esempio di confronto è presentato nella figura 1. In ultimo, come test di riferimento, sono presentati e discussi i risultati su output simulati a partire da un sistema con input generati casualmente.

La tesi si chiude con un capitolo di discussione sui risultati numerici, dove viene osservato che in tutti i casi le performance dell'identificazione frazionaria erano sovrapponibili con quelle ottenute tramite tecniche classiche. La conclusione che viene tratta è che gli operatori frazionari mettono di fronte a un *trade-off*: se da un lato non migliorano l'efficienza dell'approssimazione dei sistemi che descrivono, rispetto a operatori ordinari (soprattutto se approssimati con filtri di alto ordine), il loro vero vantaggio da sfruttare è la loro natura intrinsecamente non locale, utile ad esempio per modellare sistemi con memoria o meccanismi di azione a distanza.

I contenuti originali della tesi sono stati recentemente inseriti negli articoli [1, 2].

Riferimenti bibliografici

[1] C. Boiti, J. Franceschi, *Integral transforms suitable for solving fractional differential equations*, preprint, sottomesso per la pubblicazione.

[2] J. A. Conejero, J. Franceschi, E. Picó i Marco, *Fractional vs. ordinary controllers*, preprint, sottomesso per la pubblicazione.

[3] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2004, Springer Berlin, 2010.

[4] A. A. Kilbas, Y. F. Luchko, J. J. Trujillo, *Fractional Fourier transform in the framework of fractional calculus operators*, Integral Transforms and Special Functions, **21**, n. 10 (2010), pp. 779–795.

[5] C. A. Monje et al., *Fractional-order Systems and Control: Fundamentals and Applications*, Advances in Industrial Control, Springer London, 2010.

[6] A. Oustaloup et al., *Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis*, IEEE Trans. Circuits Sys. I–Regul. Pap. **47**, n. 1 (2000), pp. 25–39.

[7] A. Pavlov et al., *Frequency response functions and Bode plots for nonlinear convergent systems*, Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA (2006).

[8] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[9] A. Tepljakov et al., *FOMCON: a MATLAB toolbox for fractional-order system identification and control*, International Journal of Microelectronics and Computer Science, **2** (2011), pp. 51–62.