Università di Pisa

Sintesi Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Daniele Tiberio

"Vanishing and non-vanishing geodesic distances in infinite dimensions"

Relatore: Professor Valentino Magnani

1 Introduzione, risultati e obiettivi

In varie aree della Matematica pura e applicata è emersa in modo naturale la necessità di studiare la geometria riemanniana in varietà lisce infinito dimensionali. Tra queste possiamo distinguere quelle modellate su spazi di Hilbert, di Banach, di Fréchet, o anche su spazi più generali. Un esempio molto importante è dato dallo studio di alcune equazioni alle derivate parziali da un punto di vista geometrico, realizzandole come equazioni geodetiche di opportune metriche riemanniane "deboli" su varietà infinito dimensionali. Questo approccio è stato proposto per la prima volta da Arnold in [2], per lo studio dell'equazione di Eulero in Fluidodinamica. Tale formulazione è stata successivamente sviluppata ed applicata ad altre equazioni alle derivate parziali rilevanti in Fluidodinamica ed in Fisica.

Negli ultimi decenni gli strumenti e le tecniche di geometria riemanniana infinito dimensionale sono state ampiamente utilizzate, ad esempio nella "Shape Analysis" e nella "Computational Anatomy" [5], [7]. Uno degli strumenti principalmente utilizzati in questi contesti è la *distanza geodetica*, ovvero l'estremo inferiore delle lunghezze di tutte le curve continue e lisce a tratti che uniscono due punti fissati. È ben noto che in una varietà riemanniana connessa finito dimensionale la distanza geodetica è una effettivamente distanza sulla varietà, che ne metrizza la topologia.

L'obiettivo della tesi è stato quello di capire se la distanza geodetica soddisfa tutti gli assiomi delle distanze quando la varietà ha dimensione infinita. In questo ambito la tesi ha dato un preciso contributo scientifico in [19]. Per raggiungerlo è stato necessario uno studio approfondito dei risultati presenti in letteratura, vista l'assenza di una trattazione sistematica della materia. La necessità di tale trattazione è mostrata anche dal libro recente [29] sull'analisi e la geometria in dimensione infinita, apparso dopo oltre un anno dalla pubblicazione [19]. Si nota che tale risultato della tesi è stato presentato e analizzato in varie parti di questo nuovo libro. Durante la preparazione della tesi si è inoltre consolidata la proficua collaborazione con il Professor Magnani, dalla quale sono nate diverse direzioni di ricerca, che saranno indicate nel seguito. Alcune di queste sono state affrontate in un lavoro recentemente pubblicato, [20].

2 Varietà lisce modellate su spazi infinito dimensionali

Nella prima parte della tesi (capitoli 2,3 e 4) sono state introdotte le varietà lisce infinito dimensionali. In particolare, nel Capitolo 2 è stato introdotto il calcolo differenziale classico in spazi di Banach, [9], [17], [16], [1]. È basato sul fatto che lo spazio di tutte le mappe lineari e continue tra spazi di Banach è ancora uno spazio di Banach. Questo non è più vero in contesti più generali e ciò non permette di sviluppare un calcolo differenziale analogo oltre gli spazi di Banach. Pertanto, nel Capitolo 3 è stato introdotto il calcolo differenziale di Michal-Bastiani in spazi di Fréchet, sviluppato in [21], [22], [3], [27]. Avendo introdotto due diverse nozioni di calcolo differenziale, una sezione della tesi è dedicata al loro confronto nel caso di spazi di Banach. In particolare, la differenziabilità C^k nel senso classico è più forte di quella di Michal-Bastiani in spazi di Banach. Tuttavia è stato dimostrato nel Capitolo 3 che tali nozioni di differenziabilità definiscono le stesse mappe C^∞. Il calcolo differenziale classico permette di avere in spazi di Banach i teoremi di esistenza, unicità e dipendenza liscia dai dati iniziali del problema di Cauchy, che sono di fondamentale importanza per definire i classici strumenti della geometria differenziale modellata su spazi di Banach. Tuttavia, già il teorema di esistenza per il problema di Cauchy non vale in spazi di Fréchet. La tesi presenta un esempio di problema di Cauchy in uno spazio di Fréchet che non ammette nessuna soluzione locale.

Nel Capitolo 3 è stato introdotto un integrale per curve a valori in spazi di Fréchet. L'importanza di questo integrale sta nella validità del Teorema Fondamentale del Calcolo, che si utilizza ad esempio per dimostrare la regola della catena nel calcolo differenziale di Michal-Bastiani, [14], [27], [28]. La formula per la differenziazione di mappe composte è fondamentale per poter definire varietà lisce modellate su questi spazi, in quanto si utilizza la differenziabilità delle mappe di transizione.

Dopo aver introdotto un buon calcolo differenziale per mappe definite tra spazi di Fréchet, nel Capitolo 4 sono state introdotte le varietà differenziabili modellate su questi spazi. È stato esposto un esempio non banale di varietà di Banach puramente infinito dimensionale, costruito in [11]. Tale varietà è costituita da tutte le mappe continue da uno spazio topologico compatto e a valori in una varietà riemanniana. Nel Capitolo 4 sono stati poi introdotti gli oggetti classici della geometria differenziale in varietà lisce modellate su spazi di Fréchet, quali il fibrato tangente, i campi vettoriali e le parentesi di Lie tra campi vettoriali. Un aspetto importante è che non si può definire in generale lo spazio tangente tramite le derivazioni, diversamente dal caso finito dimensionale. Al fine di comprendere tale problematica è stata dedicata una sezione alle derivazioni, dove si dimostra che in uno spazio di Banach non riflessivo le derivazioni non sono solo quelle definite da vettori tangenti. Si conclude quindi che non può esserci un'identificazione tra derivazioni e vettori tangenti in dimensione infinita.

3 Distanze geodetiche su varietà riemanniane di Banach

3.1 Metriche riemanniane su varietà di Banach

Dopo aver introdotto le varietà lisce, nel Capitolo 4 sono stati introdotti i fibrati tensoriali in varietà di Banach e conseguentemente le metriche riemanniane nel Capitolo 5. In particolare sono state introdotte le metriche riemanniane *deboli*, studiate anche in [1], [10], [8], [7], [23] e le metriche riemanniane *forti*, ampiamente studiate in [1], [15], [17]. È stata dimostrata l'equivalenza tra le diverse definizioni trovate in letteratura. Le metriche riemanniane deboli sono

fondamentali per studiare la geometria riemanniana in varietà di Banach. Infatti le metriche forti possono essere definite solo su varietà di Hilbert.

3.2 Distanze geodetiche

La *distanza geodetica* associata ad una metrica riemanniana è stata introdotta nel Capitolo 5, analogamente al caso finito dimensionale. Seguendo [17] è stato dimostrato che nel caso di una metrica riemanniana forte la funzione distanza geodetica definisce una distanza sulla varietà. La distanza geodetica associata ad una metrica riemanniana debole è una pseudodistanza, in quanto valgono la disuguaglianza triangolare, la simmetria, ma *non è necessariamente positiva tra punti distinti*, ovvero può essere *degenere*. Il primo esempio di tale fenomeno fu scoperto nella varietà costituita dai simplettomorfismi, [12]. Altri esempi furono scoperti da P. Michor e D. Mumford in "speciali" varietà di immersioni, [24], [25]. In tali esempi è anche possibile avere la distanza geodetica identicamente nulla su tutte le coppie di punti, ovvero abbiamo una distanza *"vanishing"*. Questa scoperta fu sorprendente per gli stessi autori, infatti in [25] si legge: *"Surprisingly, the Riemannian distance defined as the infimum of the arclength of paths connecting two points in* $B_e(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}^2)$ *turns out to be 0, see 3.10! This seems to be one of the first examples where this purely infinite dimensional phenomenon actually appears."* In seguito, sono emersi in letteratura numerosi altri esempi di varietà con metriche riemanniane deboli la cui distanza geodetica è "vanishing". Il lavoro più recente sull'argomento è [6]. D'altra parte tutti gli esempi menzionati fino ad ora e tutti quelli in letteratura considerano varietà di Fréchet. È quindi molto naturale chiedersi se tali annullamenti della distanza geodetica possono avvenire anche in varietà di Banach o di Hilbert, che costituiscono i più semplici esempi di spazi infinito dimensionali. Quindi nel Capitolo 5 si affronta la questione centrale della tesi:

(A) la funzione distanza geodetica associata ad una metrica riemanniana debole su una varietà di Banach o Hilbert è una distanza?

Sorprendentemente tale domanda non aveva una risposta. Il risultato scientifico principale della tesi è stato proprio rispondere alla domanda (A).

Teorema (Magnani–Tiberio 2020, [19])**.** *Esiste una metrica riemanniana debole su* ℓ^2 *tale che la distanza geodetica associata è nulla tra qualunque coppia di punti in* ℓ^2.

Questo risultato è esposto nel Capitolo 5 ed è stato pubblicato in [19]. Sorprendentemente la costruzione della speciale metrica riemanniana debole si basa su strumenti elementari. Si utilizza semplicemente la possibilità di far degenerare la metrica su una successione di infinite direzioni linearmente indipendenti. La semplicità della costruzione è proprio un'altra importante novità che rende interessante il risultato. Infatti gli esempi di distanze geodetiche "vanishing" già presenti in letteratura si ottengono con dimostrazioni molto complicate. Questo è il primo esempio di distanza geodetica "vanishing" nella più semplice varietà di dimensione infinita, in quanto è semplicemente uno spazio di Hilbert.

3.3 Curvatura

Il fenomeno della distanza geodetica "degenere" ha particolare interesse anche in relazione ad una congettura posta da Michor e Mumford. Infatti in [24] si sospetta che deve esserci un legame tra il degenerare della distanza geodetica e l'illimitatezza della curvatura sezionale. L'attuale interesse per questa congettura è evidenziato anche in [6].

L'oggetto principale per l'analisi della curvatura sezionale è la derivata covariante di Levi-Civita, studiata nel Capitolo 5. In particolare, sono state dimostrate esistenza e unicità della derivata covariante di Levi-Civita per metriche riemanniane forti. Tuttavia, l'esistenza della Levi-Civita non è garantita per metriche riemanniane deboli, sebbene la loro unicità sia garantita anche in questo caso. Un controesempio noto è dato da un particolare gruppo di Fréchet di diffeomorfismi [4]. Nel Capitolo 5 è stato osservato che anche nell'esempio costruito in [19] la derivata covariante di Levi-Civita non esiste in senso classico.

3.4 Sviluppi futuri

Una questione rimasta aperta nella tesi è quella di studiare la congettura di Michor e Mumford. Un nuovo esempio in cui la congettura è verificata è stato fornito successivamente al lavoro di tesi, [20]. Una questione non banale, strettamente legata alla congettura e che sarà oggetto di ricerca è quella di capire come studiare le curvature sezionali per metriche riemanniane deboli, quando la derivata covariante di Levi-Civita non esiste.

4 Distanza geodetica su gruppi di Lie infinito dimensionali

Nel Capitolo 6 si introducono i gruppi di Lie modellati su spazi vettoriali topologici localmente convessi, [28], [13], [26]. Su questi gruppi si considerano metriche riemanniane deboli che sono anche *invarianti a destra*. È naturale chiedersi se tale invarianza della metrica debole può impedire l'annullamento della distanza geodetica. Esempi di metriche riemanniane deboli invarianti a destra con distanza geodetica degenere erano noti in alcuni gruppi di diffeomorfismi modellati su spazi di Fréchet. Anche in questo caso non si conosceva la risposta per gruppi di Lie modellati su spazi di Banach. Un'ulteriore motivazione per lo studio di tali gruppi infinito dimensionali proviene da alcuni risultati di differenziabilità e di calcoli di area ottenuti in una classe generale di gruppi di Banach omogenei, [18].

Nel Capitolo 6 si è affrontata una nuova questione, così formulabile:

(B) in un gruppo di Lie modellato su uno spazio di Banach, l'invarianza a destra di una metrica riemanniana debole impedisce l'annullamento della distanza geodetica?

Il capitolo dà una prima risposta a questa domanda, considerando il caso di gruppi di Lie abeliani, connessi, semplicemente connessi e modellati su spazi di Banach. In questo caso la tesi mostra che la distanza geodetica per una metrica debole invariante è una vera distanza. La risposta completa è data nel successivo lavoro [20]. Nel Capitolo 6 è stato infine dimostrato un teorema apparso in [6], che fornisce condizioni equivalenti al degenerare della distanza geodetica su opportuni gruppi di Lie. Questo teorema è importante perché viene utilizzato per dimostrare il degenerare della distanza geodetica su alcuni gruppi di diffeomorfismi [12], [6].

4.1 Sviluppi futuri

La risposta data in [20] alla domanda (B) apre a sua volta nuove direzioni di ricerca.

5 Verso una distanza sub-riemanniana su varietà di Hilbert

Una varietà sub-riemanniana di dimensione finita si ottiene assegnando una *distribuzione orizzontale*, ovvero una famiglia di sottospazi dei tangenti che varia in modo liscio, ed assegnando

su di essa dei prodotti scalari. Si origina quindi una *metrica sub-riemanniana*. La distanza *sub-riemanniana* tra due punti è l'estremo inferiore delle lunghezze di tutte le curve *orizzontali* che li collegano. Le curve orizzontali si distinguono per essere continue, lisce a tratti e tangenti alla distribuzione, ovvero si muovono lungo le direzioni consentite dalla distribuzione orizzontale. Questo solleva la seguente domanda:

(C) è vero che per ogni coppia di punti esiste una curva orizzontale che li unisce?

In caso affermativo, la struttura sub-riemanniana si dice *controllabile*. In una varietà sub-riemanniana di dimensione finita il teorema di Chow-Raschevskii fornisce una condizione sufficiente per la controllabilità. È importante osservare che la controllabilità è una proprietà della distribuzione orizzontale, pertanto non dipende dalla metrica sub-riemanniana che si sceglie. Tuttavia la controllabilità è una proprietà fondamentale affinché la distanza sub-riemanniana sia finita e quindi sia una vera distanza. Nel Capitolo 7 si introducono strutture sub-riemanniane su varietà di Hilbert e si presenta un teorema di controllabilità.

Riferimenti bibliografici

[1] Ralph H. Abraham, Jerrold E. Marsden, and Tudor S. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.

[2] Vladimir I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(fasc., fasc. 1):319–361, 1966.

[3] Andrée Bastiani. Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie. *J. Analyse Math.*, 13:1–114, 1964.

[4] Martin Bauer, Martins Bruveris, and Peter W. Michor. The homogeneous sobolev metric of order one on diffeomorphism groups on the real line. *J Nonlinear Sci*, 24:769–808, 2014.

[5] Martin Bauer, Martins Bruveris, and Peter W. Michor. Overview of the geometries of shape spaces and diffeomorphism groups. *J. Math. Imaging Vision*, 50(1-2):60–97, 2014.

[6] Martin Bauer, Philipp Harms, and Stephen C. Preston. Vanishing Distance Phenomena and the Geometric Approach to SQG. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 235(3):1445–1466, 2020.

[7] Martins Bruveris. Riemannian geometry for shape analysis and computational anatomy. *arXiv:1807.11290*, 2018. Lecture notes.

[8] Brian Clarke. The metric geometry of the manifold of riemannian metrics over a closed manifold. *Calc. Var.*, 39:533–545, 2010.

[9] Jean Dieudonne. *Treatise on Analysis. Foundations of Modern Analysis*, volume 1. Academic Press, 2nd rev edition, 1969.

[10] David G. Ebin and Jerrold Marsden. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. *Annals of Mathematics*, 92(1):102–163, 1970.

[11] James Eells, Jr. On the geometry of function spaces. In *Symposium internacional de topología algebraica International symposium on algebraic topology*, pages 303–308. Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 1958.

[12] Yakov Eliashberg and Leonid Polterovich. Bi-invariant metrics on the group of Hamiltonian diffeomorphisms. *Internat. J. Math.*, 4(5):727–738, 1993.

[13] Helge Glockner. Fundamental problems in the theory of infinite-dimensional Lie groups. *J. Geom. Symmetry Phys.*, 5:24–35, 2006.

[14] Richard S. Hamilton. The inverse function theorem of nash and moser. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(1):65–222, 07 1982.

[15] Wilhelm P. A. Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 1995.

[16] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 142. Springer-Verlag New York, 3 edition, 1993.

[17] Serge Lang. *Fundamentals of differential geometry*, volume 191 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[18] Valentino Magnani and Tapio Rajala. Radon-Nikodym property and area formula for Banach homogeneous group targets. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (23):6399–6430, 2014.

[19] Valentino Magnani and Daniele Tiberio. A remark on vanishing geodesic distances in infinite dimensions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148(8):3653–3656, 2020.

[20] Valentino Magnani and Daniele Tiberio. On the Michor–Mumford phenomenon in the infinite dimensional Heisenberg group. *Rev Mat Complut (online publication)*, 2022.

[21] Aristotle D. Michal. Differential calculus in linear topological spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(8):340–342, 1938.

[22] Aristotle D. Michal. Differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 26:356–359, 1940.

[23] Mario Micheli, Peter Michor, and David Mumford. Sobolev metrics on diffeomorphism groups and the derived geometry of spaces of submanifolds. *arxiv e-prints*, 2013.

[24] Peter W. Michor and David Mumford. Vanishing geodesic distance on spaces of submanifolds and diffeomorphisms. *Doc. Math.*, 10:217–245, 2005.

[25] Peter W. Michor and David Mumford. Riemannian geometries on spaces of plane curves. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 8(1):1–48, 2006.

[26] John Milnor. Remarks on infinite dimensional Lie groups. In *Relativity, groups and topology: Proceedings, 40th Summer School of Theoretical Physics - Session 40: Les Houches, France, June 27 - August 4, 1983, vol. 2*, pages 1007–1057, 1984.

[27] K-H. Neeb. Representations of infinite dimensional groups. In Tilmann Wurzbacher (eds.) Alan Huckleberry, editor, *Infinite Dimensional Kähler Manifolds*, DMV Seminar Band 31. Birkhäuser Basel, 2001.

[28] Karl-Hermann Neeb. Towards a Lie theory of locally convex groups. *Jpn. J. Math.*, 1(2):291–468, 2006.

[29] Alexander Schmeding. An introduction to infinite-dimensional differential geometry. *arXiv preprint arXiv:2112.08114*, 2021.