

BREVE RIASSUNTO TESI DI DOTTORATO
"VARIATIONAL PROBLEMS FOR NONLINEAR SCHRÖDINGER
EQUATIONS ON METRIC GRAPHS"

SIMONE DOVETTA

La Tesi di Dottorato si concentra sullo studio di problemi variazionali per equazioni di Schrödinger nonlineari del tipo

$$u'' + |u|^{p-2}u = \lambda u, \quad (1)$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro reale e u è una funzione definita su un grafo metrico \mathcal{G} .

Un *grafo metrico* (o *network*) è una varietà singolare localmente unidimensionale, composta da intervalli uniti tra loro identificando alcuni degli estremi. Tali intervalli sono detti *lati* del grafo e possono essere limitati o illimitati (semirette). I punti in cui le identificazioni tra estremi vengono realizzate sono detti *vertici*. Introducendo una coordinata su ogni lato, si ottiene uno spazio metrico, su cui è possibile definire gli usuali spazi $L^p(\mathcal{G})$ e $H^1(\mathcal{G})$.

La Tesi studia i punti critici del funzionale

$$E(u, \mathcal{G}) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p dx \quad (2)$$

nello spazio delle funzioni $u \in H^1(\mathcal{G})$ che verificano il vincolo di massa

$$\int_{\mathcal{G}} |u|^2 dx = \mu, \quad (3)$$

in cui $\mu > 0$ è un parametro del problema.

E' noto che punti critici di (2) soggetti a (3) sono soluzioni di (1).

La motivazione per lo studio di questi problemi è duplice.

Dal punto di vista delle applicazioni, l'equazione di Schrödinger fornisce un solido paradigma nella modellizzazione matematica di molti fenomeni delle scienze naturali. A titolo di esempio, ci si limita qui a citare la Meccanica Quantistica ed in particolare la teoria della condensazione di Bose–Einstein, che descrive la fenomenologia di un sistema di bosoni a basse temperature.

Dal punto di vista matematico, l'interesse principale risiede nel considerare questi problemi variazionali su grafi metrici. Poichè un grafo è determinato dai lati che lo compongono e dallo specifico modo in cui essi sono uniti tra loro, ci si attende che il problema si comporti in maniera diversa a seconda del grafo che si prende in esame. Capire come l'esistenza di punti critici di (2)–(3) dipenda dalla topologia (il modo in cui i lati sono uniti) e dalla metrica (le lunghezze dei lati) costituisce un problema matematico non banale.

L'interesse per equazioni di Schrödinger su grafi metrici è andato via via crescendo soprattutto negli ultimi decenni. Sebbene risultati di vario tipo siano presenti nella letteratura antecedente questa Tesi, l'esistenza e non di punti critici di (2)–(3), ed in particolare dei minimi di (2) a massa fissata, detti *ground states*, era nota in generale solo nel caso di grafi con un numero finito di lati e vertici e con almeno una semiretta.

La Tesi affronta in maniera sistematica l'esistenza di punti critici, con un focus primario sui *ground states*, per varie classi di grafi. Il lavoro è diviso in cinque parti:

1. Grafi compatti;
2. Grafi con semirette;
3. Grafi periodici;
4. Alberi;
5. Unicità.

Per grafi compatti, i.e. grafi con un numero finito di lati tutti di lunghezza finita, si dimostra esistenza di infinite soluzioni, per opportuni valori della potenza p e della massa μ . Ci si concentra poi su soluzioni costanti sul grafo, la cui esistenza è proprietà esclusiva dei grafi compatti. Se ne analizzano le proprietà variazionali, discutendo in particolare la possibilità che la soluzione costante sia il ground state. La dipendenza di tali risultati dalla topologia e dalla metrica è caratterizzata in modo esaustivo.

Per grafi con semirette, si indaga l'esistenza di ground states per l'energia (2) in cui il secondo integrale è ristretto alla parte compatta del grafo (modello a nonlinearity concentrata) nel caso critico $p = 6$. Si fornisce una caratterizzazione topologica completa di tale problema, dettagliata da un'analisi del ruolo della metrica nel determinare il valore ottimale di alcune grandezze chiave. Questa parte della Tesi completa lo studio dei ground states su grafi con semirette per il modello a nonlinearity concentrata, già noto in letteratura per $p < 6$.

Le parti 3 e 4 studiano l'esistenza di ground states per (2)–(3) su grafi con un numero infinito di lati, tutti di lunghezza finita. Di particolare interesse in questo caso è la comparsa di fenomeni di soglia (per i quali l'esistenza dipende dal valore della massa μ) per potenze $p \in (2, 6)$. Tale fenomeno non si verifica in nessun altro grafo noto in letteratura o affrontato in precedenza nella Tesi. Inoltre, sebbene la presenza di questi fenomeni accomuni i grafi periodici e gli alberi, sia le modalità con cui questi comportamenti critici si manifestano sia la motivazione per cui si osservano appaiono profondamente diverse. Nel caso di grafi periodici, si sviluppa una teoria completa del problema, rivelando le radici di tali fenomeni nell'interazione tra la microscala e la macroscala del grafo. Nel caso degli alberi, i risultati sin qui ottenuti sono parziali e numerosi problemi aperti vengono presentati. L'emergere di comportamenti critici per potenze $p \in (2, 6)$ non sembra qui dipendere dall'interazione fra scale diverse del grafo, bensì dalla sua struttura ricorsiva.

Nella parte 5 si presenta un primo approccio al problema dell'unicità dei ground states. In primo luogo, si dimostra l'unicità del moltiplicatore λ in (1) per tutti i ground states alla stessa massa, escluso al più un insieme numerabile di masse. La dimostrazione di questo risultato non dipende dal fatto che il problema sia definito su un grafo. Per questo motivo, tale risultato si può direttamente estendere al caso di ground states a massa fissata su domini generici in \mathbb{R}^n , contesto nel quale l'unicità del moltiplicatore di Lagrange sembra non essere nota in generale. Nella Tesi, l'unicità di λ viene sfruttata per provare unicità del ground state per due specifiche classi di grafi. La parte 5 della Tesi termina mostrando come il risultato precedentemente ottenuto circa l'unicità del moltiplicatore di Lagrange sia in generale ottimale. A tal fine, si costruisce esplicitamente un grafo su cui esistono due ground states con stessa massa ma diverso λ : non è quindi possibile, in generale, escludere la presenza dell'insieme al più numerabile di masse in cui l'unicità del moltiplicatore di Lagrange può fallire.

I risultati ottenuti nella Tesi hanno prodotto le pubblicazioni su rivista

- [1] Dovetta S., Serra E., Tilli P., *Uniqueness and non-uniqueness of prescribed mass NLS ground states on metric graphs*, *Advances in Mathematics* **374**, (2020), 107352.
- [2] Dovetta S., Serra E., Tilli P., *NLS ground states on metric trees: existence results and open questions*, *Journal of the London Mathematical Society*, to appear. Published online: <https://doi.org/10.1112/jlms.12361>
- [3] Dovetta S., Tentarelli L., *Ground states of the L^2 -critical NLS equation with localized nonlinearity on a tadpole graph*, *Operator Theory: Advances and Applications* **281**, (2020), 113–125.
- [4] Dovetta S., Tentarelli L., *L^2 -critical NLS on noncompact metric graphs with localized nonlinearity: topological and metric features*, *Calculus of Variations and PDE* **58**(3), (2019), 58:108.
- [5] Adami R., Dovetta S., Ruighi A., *Quantum graphs and dimensional crossover: the honeycomb*, *Communications on Applied and Industrial Mathematics* **10**(1), (2019), 109–122.
- [6] Dovetta S., *Mass-constrained ground states of the stationary NLSE on periodic metric graphs*, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, (2019), 26:30.

- [7] Adami R., Dovetta S., Serra E., Tilli P., *Dimensional crossover with a continuum of critical exponents for NLS on doubly periodic metric graphs*, Analysis & PDE **12**(6), (2019), 1597–1612.
- [8] Adami R., Dovetta S., *One-dimensional versions of three-dimensional system: ground states for the NLS on the spatial grid*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni **39**(7) (2018), 181–194.
- [9] Cacciapuoti C., Dovetta S., Serra E., *Variational and stability properties of constant solutions to the NLS equation on compact metric graphs*, Milan Journal of Mathematics **86**(2), (2018), 305–327.
- [10] Dovetta S., *Existence of infinitely many stationary solutions of the L^2 -subcritical and critical NLSE on compact metric graphs*, Journal of Differential Equations **264**(7), (2018), 4806–4821.