

Syllabus delle conoscenze per il modulo (comune a tutti i corsi di laurea scientifici)

LINGUAGGIO MATEMATICO DI BASE, MODELLIZZAZIONE E RAGIONAMENTO

AVVERTENZE PARTICOLARI PER QUESTO SYLLABUS

Il modulo *Linguaggio Matematico di Base, Modellizzazione e Ragionamento* è volto a un'indicazione sulla preparazione di base complessiva dello studente, richiesta per tutti i corsi di laurea scientifici, anche quelli che utilizzano relativamente meno la matematica. Per rispondere ai quesiti che si trovano in questo modulo sono sufficienti le conoscenze matematiche previste nei primi tre o quattro anni dei curricula di tutte le scuole secondarie superiori. Tali conoscenze sono descritte sinteticamente qui sotto, raccolte in *argomenti*, con alcune considerazioni relative ai collegamenti reciproci e ad alcuni tipi di ragionamenti, procedure, azioni.

Accade spesso – ed è voluto – che in un singolo quesito compaiano concetti e termini matematici che sono qui indicati in più argomenti diversi; inoltre accade che per comprendere la domanda e le relative risposte sia necessario mescolare conoscenze matematiche, rappresentazioni grafiche e ragionamenti di vario tipo e fare un uso attento del linguaggio comune. Questa caratteristica dei quesiti, che può costituire una difficoltà per gli studenti anche se i concetti matematici coinvolti sono relativamente elementari, motiva il nome del modulo. Si coglie l'occasione per osservare che spesso può risultare difficile utilizzare immediatamente le risposte degli studenti per formulare una diagnosi di specifiche lacune di conoscenza, poiché le ragioni di una risposta errata possono essere molteplici e andare oltre la semplice ignoranza di uno specifico concetto.

Per ogni quesito presente negli esempi pubblici allegati al syllabus è indicato un argomento *primario* e possono essere dati fino a due argomenti *secondari*. Inoltre ad ogni quesito sono attribuite una o più *parole chiave*, che aiutano a etichettare il contenuto; qui sotto sono forniti l'elenco degli argomenti e l'elenco delle parole chiave più frequentemente usate.

ELENCO DEGLI ARGOMENTI

1. Numeri

Numeri primi, scomposizione in fattori primi. Massimo comun divisore e minimo comune multiplo. Divisione con resto fra numeri interi. Potenze, radici, logaritmi. Numeri decimali. Frazioni. Percentuali. Media (aritmetica). Confronti, stime e approssimazioni.

2. Algebra

Manipolazione di espressioni algebriche. Concetto di soluzione e di “insieme delle soluzioni” di una equazione, di una disequazione, di un sistema di equazioni e/o disequazioni. Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi lineari.

3. Geometria

Principali figure piane e loro proprietà elementari. Teorema di Pitagora. Proprietà dei triangoli simili. Seno, coseno e tangente di un angolo ottenuti come rapporti fra i lati di un triangolo rettangolo. Perimetro e area delle principali figure piane. Incidenza, parallelismo, perpendicolarità tra rette nel piano. Principali figure nello spazio (rette, piani, parallelepipedi, prismi, piramidi, cilindri, cono, sfere). Volume dei solidi elementari. Coordinate cartesiane nel piano. Equazione della retta per due punti. Equazione di una retta per un punto e parallela o perpendicolare a una retta data. Pendenza e intersezioni con gli assi di una retta data. Condizione di perpendicolarità fra due rette. Distanza tra due punti.

4. Funzioni, grafici, relazioni (*abbreviato: Funzioni*)

Linguaggio elementare delle funzioni. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive (o corrispondenze biunivoche). Funzioni composte, funzioni invertibili e funzione inversa. Grafico di una funzione. Funzioni potenza, radice, valore assoluto, polinomi di primo e secondo grado, funzione $1/x$, e loro grafici. Funzioni esponenziale e logaritmo, in base 2 e 10, e loro grafici. Funzioni $\sin x$ e $\cos x$, e loro grafici. Semplici equazioni e disequazioni costruite con queste funzioni.

5. Combinatoria e probabilità

Rappresentazione e conteggio di insiemi di combinazioni di vario tipo. Calcolo della probabilità di un evento in semplici situazioni.

6. Logica e linguaggio (*abbreviato: Logica*)

In una certa situazione e date certe premesse, stabilire se un'affermazione è vera o falsa (deduzione). Negare un'affermazione data. Interpretare le locuzioni "condizione necessaria", "condizione sufficiente" e "condizione necessaria e sufficiente".

7. Modellizzazione, comprensione, rappresentazione, soluzione di problemi (*abbreviato: Modellizzazione*)

Formulare in termini matematici una situazione o un problema. Comprendere testi che usano linguaggi e rappresentazioni diverse. Rappresentare dati, relazioni e funzioni con formule, tabelle, diagrammi a barre e altre modalità grafiche. Risolvere un problema, adottando semplici strategie, combinando diverse conoscenze e abilità, facendo deduzioni logiche e semplici calcoli.

ELENCO DELLE PAROLE CHIAVE

1. algebra, manipolazione di espressioni
2. angoli
3. area
4. cerchio
5. combinatoria
6. comprensione di un testo
7. confronti e stime
8. coordinate cartesiane
9. deduzione
10. disuguaglianze
11. disequazioni

12. equazione della retta
13. equazioni
14. equazioni di secondo grado
15. figure nello spazio
16. figure simili
17. frazioni
18. funzione esponenziale
19. funzione modulo, valore assoluto
20. funzioni, linguaggio delle
21. grafici
22. grafico, lettura di un
23. insiemi
24. logaritmo
25. media aritmetica
26. numeri decimali
27. percentuali
28. perimetro
29. Pitagora
30. potenze
31. probabilità
32. radici
33. rappresentazione di dati
34. relazioni-formule-linguaggio
35. seno, coseno, tangente
36. sistemi di equazioni e disequazioni
37. velocità

Note:

In tutti i quesiti occorre comprendere un testo che può contenere numeri, formule e figure. I termini e i simboli che vengono utilizzati variano tra quelli di più frequente uso nella scuola e nelle prime lezioni universitarie. In particolare si utilizzano notazioni elementari e termini del linguaggio degli insiemi (“elemento”, “appartiene”, “sottoinsieme”, “unione”, “intersezione”, “differenza”, “complementare” e “prodotto cartesiano”) e le espressioni “per ogni”, “tutti”, “nessuno”, “alcuni” e “almeno uno”.

In alcuni quesiti è necessario passare dalla descrizione a parole di una situazione (per esempio di una relazione fra grandezze) a una sua formalizzazione algebrica oppure a una sua rappresentazione grafica, e viceversa. Questo tipo di competenze in alcuni quesiti è preponderante rispetto ai concetti matematici coinvolti. In tal caso i quesiti sono classificati soltanto nell'argomento *Modellizzazione, comprensione, rappresentazione, soluzione di problemi*.

In tutti i quesiti, con diversi gradi di complessità, occorre fare deduzioni logiche (per esempio stabilire se un certo enunciato, o la sua negazione, è conseguenza logica di altri). Se questo tipo di competenze si trova in un contesto matematico elementare o in un contesto di comune conoscenza quotidiana, tali quesiti sono classificati soltanto nell'argomento *Logica e linguaggio*.

Nello svolgimento del test non è permesso usare calcolatrici di alcun tipo. Tutti i calcoli richiesti possono essere fatti a mente, o con l'aiuto di carta e penna. Alcuni quesiti sono costruiti in modo che la capacità di fare rapidamente semplici calcoli sia molto utile, e talvolta indispensabile, per la loro soluzione.

Syllabus delle conoscenze per il modulo

MATEMATICA E PROBLEMI

AVVERTENZE PARTICOLARI PER QUESTO SYLLABUS

Questo syllabus comprende tutte le conoscenze che sono indicate nel syllabus del modulo *Linguaggio Matematico di Base, Modellizzazione e Ragionamento*, anche se non sono esplicitamente qui ripetute, e valgono le considerazioni già scritte in quel modulo sulla lettura dei testi, sull'uso di termini, sulla deduzione logica.

In particolare quando la conoscenza richiesta implica un'abilità operativa si è preferito descrivere tale abilità con un verbo.

SYLLABUS

1. Insiemi numerici e strutture algebriche (*abbreviato: Algebra*)

Proprietà delle operazioni e della relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali \mathbf{Q} e nell'insieme dei numeri reali \mathbf{R} . Definizione di potenza con esponente razionale e proprietà. Semplici calcoli con i radicali. Principio di identità dei polinomi. Divisione con resto fra polinomi. Enunciato e uso del Teorema di Ruffini. Risolvere equazioni algebriche e sistemi di primo e secondo grado, o ad essi facilmente riconducibili.

2. Geometria

Conoscere e saper applicare alcuni teoremi fondamentali della geometria euclidea (criteri di uguaglianza dei triangoli, teoremi di Pitagora e di Euclide, proprietà degli angoli al centro e alla circonferenza, proprietà dei triangoli simili). Corrispondenza tra i numeri reali e i punti di una retta; sistemi di riferimento cartesiani nel piano. Descrivere sottoinsiemi del piano mediante condizioni sulle coordinate e, viceversa, interpretare geometricamente equazioni, disequazioni e sistemi; equazione della circonferenza (e, data l'equazione, determinare centro e raggio di una circonferenza); equazioni di ellisse, parabola e iperbole in un sistema di riferimento canonico; equazione di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti. Operare cambiamenti di coordinate, cambiamenti di scala, traslazioni. Riconoscere simmetrie in una figura e disegnare la figura che si ottiene da una data applicando le principali trasformazioni geometriche. Area del cerchio e lunghezza della circonferenza in termini del raggio e definizione del numero π . Visualizzare configurazioni geometriche nello spazio. Concetti di incidenza, parallelismo, perpendicolarità fra piani o rette nello spazio.

3. Trigonometria

Trasformare la misura di un angolo da gradi in radianti e viceversa. Definizioni di seno, coseno, tangente di un angolo. Dati alcuni elementi di un triangolo rettangolo (lati, angoli, seno, coseno o tangente degli angoli) trovare tutti gli altri. Relazione pitagorica ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), formule di addizione (e sottrazione) e loro immediate conseguenze (formule sugli angoli associati ad x , quali $-x$, $\pi-x$, $(\pi/2)-x$; duplicazione, bisezione); teorema dei seni e teorema del coseno (o di Carnot).

4. Funzioni, equazioni (*abbreviato: Funzioni*)

Determinare l'insieme di definizione di una funzione reale di variabile reale data mediante un'espressione analitica. Definizioni di: funzione limitata; funzione crescente in un intervallo; massimo e minimo relativo (o locale); massimo e minimo assoluto (o globale); funzione periodica.

Disegnare e/o riconoscere il grafico qualitativo di funzioni elementari (quali $ax + b$, x^2 , x^3 , \sqrt{x} , $1/x$, $|x|$). Partendo dal grafico di una funzione $f(x)$, costruire i grafici delle funzioni $|f(x)|$, $1/f(x)$, $f(x - k)$, $f(kx)$, $kf(x)$, $k + f(x)$, con k numero reale. Disegnare il grafico di una funzione ottenuta sommando funzioni di cui sia noto il grafico. Principali proprietà, comportamento (monotonia, andamento all'infinito) e grafico della funzione esponenziale a^x in dipendenza dalla base a ; definizione, principali proprietà e grafico della funzione logaritmo $\log_a x$, come inversa dell'esponenziale a^x ; in particolare, esponenziale e logaritmo aventi per base il numero e di Nepero. Definizione delle funzioni trigonometriche (seno, coseno e tangente); tracciarne il grafico interpretando le formule sugli angoli associati per individuarne le simmetrie (e viceversa); loro funzioni inverse. Risolvere e, se serve, interpretare graficamente equazioni, disequazioni, sistemi (incluse semplici equazioni e disequazioni non algebriche, in cui compaiano ad esempio le funzioni radice, modulo, esponenziale, logaritmo, trigonometriche).

5. Combinatoria, probabilità e statistica (*abbreviato: Probabilità*)

Usare le tecniche del calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni) per contare gli elementi di un insieme. Saper sviluppare la potenza terza, quarta, n -esima di un binomio. Rappresentare i possibili risultati di un esperimento come sottoinsiemi di un opportuno spazio e interpretare le operazioni insiemistiche in termini di eventi. Calcolare la probabilità di eventi in situazioni semplici. Calcolare la probabilità di eventi, a partire dalla probabilità di altri eventi.

6. Logica

Usare i connettivi logici tra proposizioni. Negare semplici proposizioni espresse nel linguaggio naturale e contenenti connettivi logici. Riconoscere proposizioni logicamente equivalenti. Usare i quantificatori “per ogni” ed “esiste”. Negare una proposizione contenente quantificatori. Riconoscere ipotesi e tesi in un teorema. Riconoscere (oppure: impostare) una dimostrazione per assurdo.

Note:

In molti quesiti sono utilizzati termini e notazioni elementari relative agli insiemi: “elemento”, “appartiene”, “sottoinsieme”, “unione”, “intersezione”, “differenza”, “complementare” e “prodotto cartesiano”.

Nello svolgimento del test non è permesso usare calcolatrici di alcun tipo. Tutti i calcoli richiesti possono essere fatti a mente, o con carta e penna. Alcuni quesiti sono costruiti in modo che la capacità di fare semplici calcoli sia molto utile, e talvolta indispensabile, per la loro soluzione.